L^3-donnée initiale minimale pour les singularités potentielles des équations de Navier-Stokes[†]

Hao Jia, Vladimír Šverák

Résumé

Nous donnons une démonstration simple de l'existence de donnée initiale qui est minimale en norme L^3 pour les singularités potentielles des équations de Navier-Stokes. Le résultat a été établi récemment dans «Gallagher I., Koch G.S., Planchon F., *A profile decomposition approach to the $L^\infty_t(L^3_x)$ Navier-Stokes regularity criterion*, arXiv:1012.0145v2» via les techniques en se reposantes sur la décomposition en profils. Notre démonstration est plus élémentaire. Elle repose sur des séparations appropriées de la donnée initiale et sur les méthodes d'énergie. La difficulté principale est la pénurie de compacité du plongement $L^3_{\rm loc} \hookrightarrow L^2_{\rm loc}$.

1 Introduction

Nous considérons du problème de valeur initiale pour les équations de Navier-Stokes sur $\mathbb{R}^3$:

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{aligned}\right\} \text{ sur } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \tag{1.1}$$

$$u(\cdot,0) = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}^3. \tag{1.2}$$

Il est bien connu si l'un champ de vecteurs à divergence nulle u_0 appartenant à un des plusieurs espaces critiques en ce qui concerne le changement d'échelle naturelle

$$\begin{aligned} u(x,t) &\to \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) \text{ pour } \lambda > 0, \\ u_0(x) &\to \lambda u_0(\lambda x) \text{ pour } \lambda > 0, \end{aligned}$$

tels que $L^3(\mathbb{R}^3)$ et $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, NSE a une unique solution «mild» locale (voir [4,6] et les références en cela). Il n'est pas évident si telle solution mild existe

[†]Traduction en français par Tuan Pham de l'article **H. Jia and V. Sverak, SIAM J. Math. Anal. 45 (2013), no. 3, 1448-1459.**

pour tout le temps ou la singularité développe en temps fini. Dans [13], il a été démontré qu'il existe une donnée initiale minimale en norme $\dot{H}^{1/2}$ qui produit une solution explosive en supposant qu'une donnée initiale produirait la singularité en temps fini. Une question naturelle est si le résultat dans [13] peut s'étendre au cadre $L^3(\mathbb{R}^3)$. Les outils principaux dans [13] sont la stabilité des singularités et la compacité d'une suite des solutions faibles adaptées (au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg) qui sont uniformément bornées en norme d'énergie, certaines estimations des soi-dites «solutions à la Leray» avec un théorème d'unicité des solutions à la Leray quand nous avons une «bonne» solution. L'un des points cruciaux dans la démonstration d'unicité est la compacité du plongement $\dot{H}^{1/2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Dans le cas de $L^3(\mathbb{R}^3)$, nous perdons cette compacité. Le question est donc si l'on peut éviter utiliser la compacité. Ceci a été fait dans [3] par utiliser la technique de décomposition en profils. Nous présentons ici une autre méthode pour surmonter la difficulté. De plus, nous prouvons la compacité de l'ensemble de «données initiales minimaux d'explosion» dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ modulo translations et dilations, ce qui n'est pas établi dans [3] (voir Section 4 ci-dessous). Notre outil clé est la simple observation suivante.

Lemme 1.1. *Soit u une solution à la Leray de la donnée initiale à divergence nulle $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$. Alors, il existe une fonction non-négative $h(t)$ qui est dépendante seulement de $\|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}$ telle que $\lim_{t\to 0^+} h(t) = 0$ et*

$$\left\|u(\cdot,t) - e^{\Delta t}u_0\right\|_{L^2(B_1(x_0))} \leq h(t) \tag{1.3}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et presque partout $0 \leq t < 1$.

La démonstration repose sur une séparation appropriée des solutions. Le point important est que $h(t)$ dans le lemme dépend seulement de la L^3-norme de la donnée initiale, ce qui donne une certaine uniformité de la continuité forte dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ à l'instant zéro pour une suite des solutions dont données initiales sont uniformément bornées dans $L^3(\mathbb{R}^3)$. Ce lemme est en fait suffisant pour étendre les arguments dans [13] au cas L^3. Nous présentons en détail les démonstrations des certains estimations et résultants d'unicité pour solutions à la Leray qui ont été démontrés dans Lemarié-Rieusset [9] et qui ont été utilisés dans [13], parce que dans la situation envisagée les démonstrations simplifient significativement. Nous référerons à [13] souvent car les idées générales sont similaires. Nous produirons les démonstrations plus détaillées des plusieurs point qui ont juste été esquissées dans [13]. Nous aussi référons les lectures à l'article récent [14] dans lequel une méthode liée d'utiliser les comparaisons avec des solutions du problème linéaire est utilisée.

Notations. Nous désignerons C comme une constante positive absolue, $C(\alpha, \lambda, \ldots)$ comme une constante positive dépendante de α, λ et cetera. Nous adoptons une règle selon laquelle les constantes non-essentielles C peuvent changer d'une ligne à l'autre. $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^3$ signifie la boule de rayon $r > 0$

et de centre x_0. $Q_r := B_r(x_0) \times (t_0 - r^2, t_0) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, et $Q_r := Q_r(0,0)$. Pour deux matrices a et b, $(a : b) := a_{ij} b_{ij}$ où nous présumons la convention de sommation d'Einstein. Nous utilisons u_0 comme une donnée initiale à divergence nulle pour NSE, sauf indication contraire.

2 Solutions à la Leray

3 Solutions mild de donnée initiale dans $L^3(\mathbb{R}^3)$

4 Le théorème principal

Pour une donnée initiale à divergence nulle $u_0 \in \mathbb{R}^3$, désignons par $T_{\max}(u_0)$ le temps minimal d'existence de la solution mild pour NSE à partir de u_0. Définissons $\rho_{\max} = \sup\{\rho : T_{\max} = \infty$ pour tout le champs de vecteurs $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle tel que $\|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} < \rho\}$. Définissons aussi $\mathscr{M} = \{u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3) : T_{\max}(u_0) < \infty, \|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} = \rho_{\max}\}$.

Théorème 4.1. *Supposons $\rho_{\max} < \infty$. Alors $\mathscr{M}$ n'est pas vide, et en plus, $\mathscr{M}$ est compact par rapport à la L^3-norme modulo des translations et dilations. C'est-à-dire, pour toute la suite u_0^k dans $\mathscr{M}$, il existe x_k et λ^k tels que $\lambda^k u_0^k(\lambda^k(x - x_k))$ a une suite extraire convergente dans $L^3(\mathbb{R}^3)$.*

Démonstration. D'après la définition de $\rho_{\max}$ et l'hypothèse que $\rho_{\max} < \infty$, il existe une suite des données initiales à divergence nulle u_0^k telles que $T_{\max}(u_0^k) < \infty$ (donc $\|u_0^k\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \geq \rho_{\max}$) et $\|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \to \rho_{\max}$. Par le lemme 3.1, nous apprenons qu'il y a des points singuliers pour les solutions mild u^k correspondantes à u_0^k. Grâce aux translations et dilations

$$u_0^k \to \lambda^k u_0^k(\lambda^k(x - x_k)),$$

pour certains λ^k et x_k, nous pouvons supposer que la première singularité est à l'instant 1 et est $(x,t) = (0,1)$. Nous désignons encore la suite nouvelle comme u^k (et u_0^k proportionnellement) après les translations et dilations. Par le lemme 3.2, nous avons

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \left\| u^k(\cdot, t) - e^{\Delta t} u_0^k \right\|_{L^2(B_1(x_0))} \leq h(t) \text{ pour } t < 1,$$

pour une fonctions non-négative $h(t)$ qui satisfait $\lim_{t \to 0^+} h(t) = 0$. Notons que le corollaire 2.1 et la remarque 3.1 impliquent la borne uniforme de u^k en norme d'énergie et

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| u^k(\cdot, t) \right\|_{L^2 + L^6} \leq C\left(\rho_{\max}\right).$$

D'après la compacité comme dans le lemme 2.4 et grâce à la continuité faible de t, nous pouvons trouver une suite extraire de u^k (que nous désignons

encore par u^k) et une solution faible appropriée u de NSE telles que:
$u^k \to u$ dans $L^3(B_1(x_0) \times (0,1))$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,
$u^k(\cdot,t) \rightharpoonup u(\cdot,t)$ dans $L^2(B_1(x_0))$ pour tout $t \in [0,1]$ et $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et,
$u_0^k \rightharpoonup u_0$ dans $L^3(\mathbb{R}^3)$.
De plus, par la stabilité de singularité dans le lemme 2.5, $(x,t) = (0,1)$ est un point singulier de u. De l'estimation (4.1) et des convergences faibles de $u^k(\cdot,t)$ et u_0^k, nous obtenons

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \left\| u(\cdot,t) - e^{\Delta t} u_0 \right\|_{L^2(B_1(x_0))} \leq h(t).$$

Puisque $h(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0,

$$u(\cdot,t) \to u_0 \text{ dans } L^2(B_1(x_0))$$

pour tout x_0. De plus,

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|u(\cdot,t)\|_{L^2+L^6} \leq C\left(\rho_{\max}\right)$$

à cause de la convergence faible de u^k et de l'estimation (4.2). Donc u satisfait la condition de décroissance à l'infini spatial, ce qui est nécessaire dans la définition des solutions à la Leray. Pour résumer, nous voyons que u est une solution à la Leray correspondante à la donnée initiale u_0. Par le résultat d'unicité dans le lemme 2.2 et la remarque en dessous, nous voyons que la solution mild à partir de u_0 doit avoir une singularité dans $\mathbb{R}^3 \times [0,1]$. Parce que

$$\|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq \liminf \left\| u_0^k \right\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq \rho_{\max},$$

par la définition de $\rho_{\max}$, nous avons $\|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} = \rho_{\max}$. Donc, $u_0^k \rightharpoonup u_0$ dans L^3 et $\left\| u_0^k \right\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \to \|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}$. Car $L^3(\mathbb{R}^3)$ est espace de Banach uniformément convexe, cela aussi implique que u_0^k converge fortement à u_0 dans $L^3(\mathbb{R}^3)$. Le théorème est démontré.

À partir des résultats ci-dessus, le corollaire suivant peut être démontré par suivre les même arguments que dans [13]:

Corollaire 4.1. *Supposons que toute la solution du problème de Cauchy (1.1) avec $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ est régulière, c'est-à-dire $T_{\max} = \infty$ pour tout $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$. Alors, pour $l = 0, 1, 2, \ldots$ il existe des fonctions $F_l : [0,\infty) \to [0,\infty)$ telles que*

$$t^{\frac{l+1}{2}} \sup_x \left| \nabla^l u(x,t) \right| \leq F_l\left(\|u_0\|_{L^3}\right) \text{ pour tout } t > 0.$$

□